

D I M E N S I O N S D E F E K T E

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
Joachim Bauer
aus Oettingen

Frankfurt am Main, 1970

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt.
Ein Exemplar der ungekürzten Arbeit liegt in der
Senckenbergischen Bibliothek der Universität vor.



Dekan:	Professor Dr.G.Schneider
Erster Berichterstatter:	Professor Dr.W.Franz
Zweiter Berichterstatter:	Professor Dr.F.W.Bauer

Tag der mündlichen Prüfung: 19.Februar 1970

Dimensionsdefekte

Einleitung:

Wir betrachten Abbildungen $f: M^n \rightarrow M'^n$ n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten und untersuchen die Urbilder $f^{-1}(y), y \in M'^n$.

Nehmen wir die unverzweigten, endlichblättrigen Überlagerungen als Maßstab für das "Wohlverhalten" einer Abbildung, so erwarten wir, daß ein Punkt der Bildmannigfaltigkeit "in der Regel" unter f mindestens so viele Urbildpunkte besitzt wie der Betrag des Abbildungsgrades $\chi(f)$ angibt.

Punkte, für die die Anzahl k der Urbildpunkte $< |\chi(f)|$ ist, heißen Defektpunkte, $d = |\chi(f)| - k$ wird Defekt des betreffenden Punktes, $D = \sum d$ über alle Defektpunkte wird Gesamtdefekt der Abbildung genannt.

H.Hopf konnte zeigen, daß der Defekt, grob gesprochen, nicht "zu groß" werden kann. Beispielsweise ist bei Abbildungen geschlossener, orientierbarer Flächen $X \rightarrow Y$ der Gesamtdefekt endlich und durch $D \leq |\chi(f)| \cdot \chi(Y) - \chi(X)$ beschränkt. ($\chi(X), \chi(Y)$ bezeichne die Eulerschen Charakteristiken.)

Wenden wir uns Abbildungen $f: M^{n+k} \rightarrow M^n$ zu, so entsprechen den Überlagerungen, an denen wir uns eben orientiert haben, die Faserbündel. Man erwartet, daß ein Punkt $y \in M^n$ mindestens k -dimensionales Urbild besitzt. Ist $\dim f^{-1}(y) < k$, so sagt man, y ist ein Punkt mit Dimensionsdefekt. Allgemeiner: $A \subset M^n$ hat Dimensionsdefekt, wenn $\dim f^{-1}(A) < k + \dim A$ ist.

H.Hopf, der in [3] den Begriff des Defektes eingeführt hat, vermutete, daß Aussagen der Art "Wenn die Abbildung f wesentlich (d.h. nicht nullhomotop) ist, können die auftretenden Dimensionsdefekte nicht zu groß oder nicht zu zahlreich sein" existieren.

Olivier griff in [4] die Hopf'sche Fragestellung auf und behandelte sie für den Spezialfall simplizialer Abbildungen.

In der vorliegenden Arbeit, die zum Teil Resultate aus der Diplomarbeit des Verfassers enthält, zeigen wir zunächst:



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545305_0034

I Unter einer wesentlichen Abbildung $f : M^n \rightarrow S^1$ einer beliebigen topologischen (nicht notwendig triangulierbaren, nicht notwendig orientierbaren, nicht notwendig geschlossenen) n -dimensionalen Mannigfaltigkeit auf die Kreislinie hat kein Punkt Dimensionsdefekt.

Zwei Spezialfälle dieses Satzes waren früher bekannt: Bei einer wesentlichen Abbildung eines Gebietes der Ebene auf die Kreislinie besitzt kein Punkt Dimensionsdefekt.

(J.Weier, Über Probleme aus der Topologie der Ebene und der Flächen. Math.Japon. 4 (1956))

Bei einer wesentlichen Abbildung einer geschlossenen Fläche auf die Kreislinie besitzt kein Punkt Dimensionsdefekt.

(J.Weier, Dimensione ed essenzialità. Ann.Univ.Ferrara, Sez.VII (N.S.) 5 (1955-1956).)

Um den Defekt bei Abbildungen f gleichdimensionaler Mannigfaltigkeiten abzuschätzen, war es zweckmäßig, f durch die zu f gehörige Überlagerung zu faktorisieren (s. [3]). Entsprechend versuchen wir zum Studium der Dimensionsdefekte, f über einer geeigneten Faserung zu faktorisieren. Hierzu dient das folgende Lemma:

II $p: S^3 \rightarrow S^2$ sei die Hopf'sche Faserabbildung. Jede stetige Abbildung $f: S^3 \times I \rightarrow S^2 \times I$ läßt sich über der Vorstufe E^*p der Einhängung Ep faktorisieren; d.h. es gibt eine Abbildung $\varphi: S^3 \times I \rightarrow S^3 \times I$ mit $f = (E^*p)\varphi$.

Als Nebenresultat aus diesem Lemma gewinnen wir den Satz:

III Unter einer wesentlichen Abbildung $f: S^4 \rightarrow S^3$ gibt es höchstens zwei Punkte a und b aus S^3 mit jeweils endlich vielen Urbildpunkten.

Um den von H.Hopf vermuteten Satz:

IV Bei einer wesentlichen Abbildung $f: S^3 \rightarrow S^2$ kann kein Punkt mit Dimensionsdefekt auftreten

zu beweisen, faktorisieren wir f über der Hopfabbildung.

$f^{-1}(y)$ ist dann das Urbild einer Kreislinie S^1 unter einer wesentlichen Abbildung $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ und man hat noch zu zeigen, daß $\varphi^{-1}(S^1)$ nicht nulldimensional, also nicht etwa das in S^3 eingebettete Cantor'sche Diskontinuum sein kann, das sich bekanntlich auf jedes Kompaktum epimorph und stetig abbilden läßt. Unter der Annahme, das Urbild eines Kurvenstückes bei einer Abbildung $f : M^n \rightarrow M'^n$ sei nulldimensional, ergibt sich für den Abbildungsgrad (wir nehmen die Mannigfaltigkeiten als orientierbar und triangulierbar an) $\chi(f) = 0$, und wir erhalten den Satz:

V Ist $f : M^n \rightarrow M'^n$ eine Abbildung mit von 0 verschiedenem Grad (was insbesondere für wesentliche Abbildungen $M^n \rightarrow S^n$ gilt), so ist das Urbild einer stetig durchlaufbaren Punktmenge mindestens eindimensional. Speziell unter einer wesentlichen Abbildung $f : S^2 \rightarrow S^2$ gibt es keine stetig durchlaufbare Ausnahmemenge.

Eine weitere, von H. Hopf ausgesprochene Vermutung, die wir beweisen, lautet:

VI Bei einer wesentlichen Abbildung $f : M^3 \rightarrow S^2$ hat kein Punkt Dimensionsdefekt.

Ist f algebraisch trivial, d.h. wird jeder 2 Zyklus von M^3 mit dem Grade 0 auf S^2 abgebildet, so kann man f über der Hopfabbildung faktorisieren und wie oben schließen. Für algebraisch wesentliche Abbildungen gilt der Satz:

VII Ist $f : M^3 \rightarrow M^2$ eine algebraisch wesentliche Abbildung einer beliebigen (nicht notwendig orientierbaren, nicht notwendig geschlossenen) 3-dim. Mannigfaltigkeit M^3 auf eine geschlossene orientierbare Fläche M^2 , so gibt es keinen Punkt mit Dimensionsdefekt.

Zum Beweis kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es auf M^3 eine geschlossene Fläche F gibt, die mit von null verschiedenem Grad auf M^2 abgebildet wird. Für jeden Punkt $y \in M^2$ liegt dann auf F mindestens ein Urbildpunkt von y . Betrachtet man eine Schar F_t zu F isotoper Flächen in M^3 , so trägt jede einen Urbildpunkt von y . C_t bezeichne das (kompakte) auf F_t liegende Urbild von y : $C_t = f^{-1}(y) \cap F_t$. Unter der Annahme, $f^{-1}(y)$ sei nulldi-

mensional, läßt sich aus C_t ein Teilkompaktum C_t^0 auswählen, das stetig von t abhängt (stetig im Sinne des Hausdorff-Abstandes, der das System der abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen eines metrischen Raumes selbst zum metrischen Raum macht). Aus C_t^0 kann man dann einen Punkt $x(t)$ auswählen, der stetig von t abhängt. Dann müßte $f^{-1}(y)$ im Widerspruch zur Annahme, nulldimensional zu sein, einen Jordanbogen enthalten.

Bei wesentlichen Abbildungen $S^4 \rightarrow S^3$ können jedoch Dimensionsdefekte auftreten, wie das Beispiel der Einhängung Ep der Hopfabbildung $p: S^3 \rightarrow S^2$ zeigt. Hier haben die Einhängungspole jeweils nur einen Urbildpunkt. Einer von H. Hopf in [3] gegebenen Anregung folgend, beweisen wir hierzu den Satz:

VIII Ist $f: S^4 \rightarrow S^3$ wesentlich und gibt es zwei Punkte u und v aus S^3 mit jeweils nur einem Urbildpunkt, so hat kein weiterer Punkt Dimensionsdefekt.

Zum Beweis zeigt man mit Hilfe des schon erwähnten Lemmas, daß sich f über der Einhängung Ep faktorisieren läßt.

Literatur:

- 1 H.Hopf: Zur Topologie der Abbildungen von
 Mannigfaltigkeiten, 1.Teil
 Math.Ann.100 (1928)
- 2 H.Hopf: Zur Topologie der Abbildungen von
 Mannigfaltigkeiten, 2.Teil
 Math.Ann.102 (1929)
- 3 H.Hopf: Über den Defekt stetiger Abbildungen
 von Mannigfaltigkeiten.
 Rendiconti di Matematica 21 (1962)
- 4 R.Olivier: Stabile Abbildungen von Mannigfaltig-
 keiten und Defekt
 Math.Ann.171 (1967)

Lebenslauf:

Am 10. Februar 1940 wurde ich in Oettingen, Krs. Nördlingen/Bay. geboren. Meine Eltern August Bauer und Rosa Bauer geb. Miller hatten in Frankfurt-Sindlingen ihren Wohnsitz, wohin sie mit mir nach dem Ende des 2. Weltkrieges zurückkehrten. Hier besuchte ich die Volksschule und anschließend das Leibniz-Gymnasium in Höchst, das ich im Februar 1960 nach bestandener Reifeprüfung verließ.

Im Sommersemester 1960 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt. Die Diplomvorprüfung für Physiker legte ich im Herbst 1962 ab; danach erhielt ich meine weitere Ausbildung am Mathematischen Seminar. Die Diplom-Hauptprüfung für das Fach Mathematik mit den Nebenfächern Angewandte Mathematik und Theoretische Physik bestand ich am 22. Februar 1967. Seit dieser Zeit bin ich Doktorand bei Herrn Professor Dr. W. Franz. Das Thema meiner Diplomarbeit lautete: "Ausnahmepunkte und Ausnahmemengen bei Abbildungen von Mannigfaltigkeiten."

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Baer, Bauer, Beck, Behrens, v. Butlar, Cramer, Czerny, Dänzer, Dittrich, Dugundji, Egle, Franz, Haase, Haken, Hartmann, Krafft, L. Marcuse, Münster, Royen, Schlögl, Schopper, Staude, Steinwedel, Stummel, Süßmann, Wieland, Zieschang und Frau Professor Moufang.

Frankfurt a.M., den 22. Januar 1970

